где

$$\vec{a}_i = \vec{e}_i + \frac{\Lambda^1_{21i}}{(\Lambda^1_{21})^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^k_{2i}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k . \qquad (7)$$

В общем случае векторы $\vec{a}_i$ линейно независимы. Область $\bar{\Omega}$ отнесем к подвижному реперу $\bar{R} = (F^1_2, \vec{a}_i)$. При таком выборе реперов R, $\bar{R}$ дифференциальные уравнения отображения f имеют вид: $\omega^i = \bar{\omega}^i$, где I-формы ω^i, $\bar{\omega}^i$ являются линейными комбинациями дифференциалов координат точек в областях Ω, $\bar{\Omega}$ соответственно.

Линии ℓ, $\bar{\ell} = f(\ell)$ называются двойными линиями отображения f, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках x, $f(x) = y$, пересекаются, либо параллельны [2].

Рассмотрим векторы $\vec{e}_1$, $\vec{a}_1$, $\overrightarrow{xF^1_2}$, где

$$\vec{a}_1 = f(\vec{e}_1), \quad \overrightarrow{xF^1_2} = -\frac{1}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_2,$$

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \frac{\Lambda^1_{211}}{(\Lambda^1_{21})^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^k_{21}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k .$$

В силу равенства (4) отсюда имеем:

$$\vec{a}_1 = \frac{\Lambda^1_{211}}{(\Lambda^1_{21})^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^3_{21}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_3 .$$

Из условия компланарности векторов $\vec{e}_1$, $\vec{a}_1$, $\overrightarrow{xF^1_2}$ получим $\Lambda^3_{21} = 0$. Но в силу равенства (5) имеем $\Lambda^3_{21} \neq 0$. Следовательно, линии ω^1 заданного семейства не могут быть двойными линиями отображения f.

Пусть линия ω^τ $(\tau = 3, \dots, n)$ является двойной линией отображения f. Из условия компланарности векторов $\vec{e}_\tau$, $\vec{a}_\tau = f(\vec{e}_\tau)$, $\overrightarrow{xF^1_2}$, где

$$\vec{a}_\tau = \frac{\Lambda^1_{21\tau}}{(\Lambda^1_{21})^2}\vec{e}_2 + \left(1 - \frac{\Lambda^\tau_{2\tau}}{\Lambda^1_{21}}\right)\vec{e}_\tau - \frac{\Lambda^k_{2\tau}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k ,$$

получим $\Lambda^k_{2\tau} = 0$ $(k \neq \tau)$. В силу последнего равенства имеем:

$$d_\tau \vec{e}_2 = \vec{\Lambda}_{2\tau} \parallel \vec{e}_\tau ,$$

где $\vec{\Lambda}_{2\tau}$ - вектор вынужденной кривизны поля вектора $\vec{e}_2$ вдоль направления $\vec{e}_\tau$. Следовательно, линия ω^τ является линией кривизны относительно одномерного распределения $\Delta_1 = (x, \vec{e}_2)$.

Обратно, если линия ω^τ является линией кривизны относительно одномерного распределения Δ_1, то векторы $\vec{e}_\tau$, $\vec{a}_\tau$, $\overrightarrow{xF^1_2}$ компланарны, т.е. линия ω^τ является двойной линией отображения f. Таким образом, доказана

Т е о р е м а. Линия ω^τ является двойной линией отображения f тогда и только тогда, когда она является линией кривизны относительно одномерного распределения $\Delta_1 = (x, \vec{e}_2)$.

Библиографический список

1. С х о у т е н И.А., С т р о й к Д.Я. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. М: ИЛ, 1948. Т.2. 348с.

2. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные сети двойных линий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1975. Вып.6. С.19-25.

УДК 514.75

О ПОЛЯХ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ $\mathcal{H}$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И.П о п о в

(Калининградский государственный университет)

В данной работе продолжаются исследования регулярных трехсоставных распределений [1] - [2] в проективном пространстве P_n, которые названы нами $\mathcal{H}$-распределениями. $\mathcal{H}$-распределение - это тройка распределений проективного пространства P_n, состоящая из базисного распределения 1-го рода r-мерных линейных элементов $\Pi_r \equiv \Lambda$ (Λ-распределение), оснащающего распределения 1-го рода m-мерных линейных элементов $\Pi_m \equiv M$ (M-распределение) и оснащающего распределения 1-го рода гиперплоскостных элементов $\Pi_{n-1} \equiv H$ (H-распределение; $r < m < n-1$), с отношением инцидентности их соответствующих элементов в общем центре X следующего вида: $X \in \Lambda \subset M \subset H$.

Найдены пучки $H\Lambda$-виртуальных и $M\Lambda$-виртуальных нормалей [1] 1-го и 2-го рода (§§ 1-2), построение которых не зависит от выбора нормали $\{\nu^\alpha_n\}$ 1-го рода H-распределения [1], [2]. Исследуются фокальные образы, принадлежащие базисному Λ-распределению и текущей $M\Lambda$-виртуальной нормали $\{\nu^q_i\}$, при условии, что M-распределение оснащено нормалями 1-го рода $\{\nu^a_\alpha\}$ (§3). Наконец, рассмотрено построение поля плоскостей Нордена-Тимофеева [7], [8], ассоциированное с M-подрасслоением данного $\mathcal{H}$-распределения (§4).

§1. О пучках нормалей 2-го рода Λ-распределения

Присоединим к $\mathcal{H}$-распределению точечный подвижной репер $\mathcal{R}=\{A_{\bar{\mathcal{J}}}\}$ следующим образом: вершины $\{A_p\}$ расположим в плоскости Λ, вершины $\{A_p, A_i\}$ - в плоскости M, вершины $\{A_\sigma\}$ - в плоскости H, а точку A_0 совместим с центром X. Выбранный таким образом репер нулевого порядка назовем репером $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ [1, §2].

Здесь и на протяжении всего изложения индексы принимают следующие значения:

$$\bar J, \bar{\mathcal{J}}, \bar K, \bar L = \overline{0,n}; \quad J, \mathcal{J}, K, L = \overline{1,n}; \quad p, q, s, t, f = \overline{1,r};$$

$$i, j, k, l = \overline{r+1,m}; \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1,n-1}; \quad a, b, c, d = \overline{1,m}; \quad \hat\alpha, \hat\beta, \hat\gamma = \overline{m+1,n};$$

$$u, v, w = \overline{r+1,n-1}; \quad \hat u, \hat v, \hat w = \overline{r+1,n}; \quad \sigma, \tau, \rho = \overline{1,n-1}.$$

В репере $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ дифференциальные уравнения $\mathcal{H}$-распределения можно представить в виде [1] :

$$\omega_p^{\hat u} = \Lambda^{\hat u}_{pK}\,\omega_0^K, \quad \omega_i^{\hat\alpha} = M^{\hat\alpha}_{iK}\,\omega_0^K; \quad \omega_\alpha^n = H^n_{\alpha K}\,\omega_0^K, \tag{1}$$

$$\nabla\Lambda^{\hat u}_{pK} - \delta^{\hat u}_K\,\omega^0_p = \Lambda^{\hat u}_{pKL}\,\omega_0^L, \tag{2}$$

$$\nabla M^{\hat\alpha}_{iK} - M^{\hat\alpha}_{pK}\,\omega^p_i = M^{\hat\alpha}_{iKL}\,\omega_0^L, \tag{3}$$

$$\nabla H^n_{\alpha K} - \Lambda^n_{aK}\,\omega^a_\alpha - \delta^n_K\,\omega^0_\alpha = H^n_{\alpha KL}\,\omega_0^L, \tag{4}$$

где

$$M^n_{pK} = H^n_{pK} = \Lambda^n_{pK}, \quad H^n_{iK} = M^n_{iK}, \quad M^\alpha_{pK} = \Lambda^\alpha_{pK}. \tag{5}$$

Коэффициенты в правых частях уравнений (2) - (4), вообще говоря, не симметричны по нижним индексам, а символом ∇ обозначается оператор, применяемый в работах Г.Ф.Лаптева и Н.М.Остиану [3], [4].

Будем исходить из того, что к базисному Λ-распределению всегда можно присоединить внутренним инвариантным образом, как это показано а работах Г.Ф.Лаптева и Н.М.Остиану [3], [4], пучок нормалей 1-го рода (H, M), определяемый геометрическими объектами (квазитензорами) $\{H^p_{\hat u}\}$ [3] и $\{N^p_{\hat u}\}$ [4]. В соответствии Бомпьяни-Пантази [3]:

$$\nu_p = -\frac{1}{n-r}\left(\Lambda^{\hat u}_{p\hat u} + \Lambda^{\hat u}_{pq}\,\nu^q_{\hat u}\right), \tag{6}$$

где

$$\nabla\nu_p + \omega^0_p = \nu_{pK}\,\omega_0^K, \quad \nabla\nu^q_{\hat u} + \omega^q_{\hat u} = \nu^q_{\hat u K}\,\omega_0^K, \tag{7}$$

в каждом центре A_0 нормали 1-го рода $\{H^p_{\hat u}\}$ Λ-распределения ставится в соответствие $(r-1)$-мерная нормаль 2-го рода (ℓ-плоскость), определяемая квазитензором 1-го порядка

$$\ell_p = -\frac{1}{n-r}\left(\Lambda^{\hat u}_{p\hat u} + \Lambda^{\hat u}_{pq}\,H^q_{\hat u}\right). \tag{8}$$

Аналогично, нормали 1-го рода $\{N^q_{\hat u}\}$ Λ-распределения ставится в соответствие нормаль 2-го рода (τ-плоскость), определяемая квазитензором 2-го порядка:

$$\tau_p = -\frac{1}{n-r}\left(\Lambda^{\hat u}_{p\hat u} + \Lambda^{\hat u}_{pq}\,N^q_{\hat u}\right). \tag{9}$$

Пусть, кроме того, нормали 1-го рода $\{N^p_{\hat u}\}$ Λ-распределения в соответствии, устанавливаемом квазинормалью [3]

$$t^p_{\hat u} = \Lambda^{\hat v}_{q\hat u}\, b^{qt}_{\hat v}\, \overset{*}{B}{}^p_t, \tag{10}$$

где $\{\overset{*}{B}{}^p_t\}$ - тензор, обращенный к невырожденному тензору [2]

$$B^p_t = b^{pq}_{\hat u}\,\Lambda^{\hat u}_{qt},$$

соответствует $(r-1)$-мерная нормаль 2-го рода (b-плоскость), определяемая квазитензором 2-го порядка

$$b_p = -\frac{1}{n-r}\,B^f_p\,\Lambda^{\hat u}_{fq}\left(N^q_{\hat u} + t^q_{\hat u}\right). \tag{11}$$

Отметим, что нормали $\{H^p_{\hat u}\}$ 1-го рода Λ-распределения в соответствии, устанавливаемом квазинормалью (10) (доказательство проводится аналогично, как и в работе [3]), ставится в соответствие нормаль 2-го рода $\{\ell_p\}$, т.е. ℓ-плоскость.

Таким образом, имеются три пучка $(\ell, b), (\ell, \tau), (b, \tau)$ нормалей 2-го рода базисного Λ-распределения, определяемых ℓ-плоскостью, b-плоскостью, τ-плоскостью, т.к. в общем случае эти плоскости различные.

§2. Пучки $M\Lambda$-виртуальных и $H\Lambda$-виртуальных нормалей базисного Λ-распределения

1. Пусть базисное Λ-распределение данного $\mathcal{H}$-распределения оснащено полем нормалей 1-го рода N_{n-r}, которое определено полем квазитензора $\{N^p_u\}$ [4]. В каждом центре A_0 $\mathcal{H}$-распределения гиперплоскость $H(A_0)$ пересекается с нормалью $N_{n-r}(A_0)$ по $(n-r-1)$-мерной плоскости $N_{n-r-1}(A_0)$, которая относительно локального репера $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ определяется системой конечных уравнений:

$$y^p - N^p_u y^u = 0, \quad y^n = 0, \tag{12}$$

где

$$\nabla N^p_u + \omega^p_u = N^p_{uK}\omega^K_0. \tag{13}$$

Таким образом, поле квазитензора 2-го порядка $\{N^p_u\}$ задает поле $H\Lambda$-виртуальных нормалей N_{n-r-1} [1]. Аналогичные построения можно провести, если задано поле квазитензора $\{H^p_u\}$, построенное Н.М.Остиану [3]. Тогда имеем еще одно поле $H\Lambda$-виртуальных нормалей H_{n-r-1}, определяемое полем квазитензора 1-го рода $\{H^p_u\}$, причем квазитензоры $\{H^p_u\}$ и $\{N^p_u\}$ различны. Ранее мы ввели в рассмотрение поля различных квазитензоров 1-го порядка $\{\chi^p_u\}$ и $\{\check{B}^p_u\}$ [2], определяющих поля $H\Lambda$-виртуальных нормалей χ_{n-r-1} и $\check{B}_{n-r-1}$. Можно показать, что все рассматриваемые нами геометрические объекты $\{H^p_u\}, \{N^p_u\}, \{\check{B}^p_u\}, \{\chi^p_u\}$ различны между собой. В результате приходим к следующему предложению.

Т е о р е м а 1. В дифференциальных окрестностях 1-го и 2-го порядка к Λ-распределению внутренним инвариантным образом можно присоединить соответственно по три однопараметрических пучка $H\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода: в окрестности 1-го порядка пучки $(\check{B},H),(\check{B},\chi),(H,\chi)$, а в окрестности 2-го порядка пучки $(\check{B},N),(N,H),(N,\chi)$. Если $H\Lambda$-распределение взаимно [5], [6], то имеется только одно однопараметрическое семейство (H,χ) [1],[9] в окрестности 1-го порядка и два однопараметрических пучка (N,H), (N,χ) в окрестности 2-го порядка внутренних $H\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода.

З а м е ч а н и е. Построение полей квазитензоров $\{T^p_u\}$, $\{\mathcal{H}^p_u\}$ [2], определяющих $H\Lambda$-виртуальные нормали 1-го рода в отличие от рассмотренных нами, зависит от выбора нормали 1-го рода $\{\nu^n_u\}$ оснащающего H-распределения.

2. Пересечение плоскости $M(A_0)$ и $H\Lambda$-виртуальной нормали $N_{n-r-1}(A_0)$ 1-го рода Λ-плоскости в каждом центре A_0 задается относительно локального репера $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ системой конечных уравнений:

$$x^p - N^p_i x^i = 0, \quad x^{\hat{n}} = 0, \tag{14}$$

где

$$\nabla N^p_i + \omega^p_i = N^p_{iK}\omega^K_0. \tag{15}$$

Отсюда следует, что поле квазитензора 2-го порядка $\{N^p_i\}$ задает $M\Lambda$-виртуальную нормаль [1] 1-го рода, которую обозначим N_ℓ (N_ℓ-плоскость, где $\ell = m-r$). Аналогично находим, что поля квазитензоров 1-го порядка $\{H^p_i\}, \{\check{B}^p_i\}, \{\chi^p_i\}$ задают соответственно поля H_ℓ-плоскостей, $\check{B}_\ell$-плоскостей и L-плоскостей [1]. В общем случае в каждом центре A_0 $\mathcal{H}$-распределения все эти плоскости различны (не совпадают друг с другом) и каждая из них не принадлежит пучку, определяемому двумя другими. Таким образом, имеет место

Т е о р е м а 2. В дифференциальной окрестности 1-го порядка к Λ-распределению внутренним образом можно присоединить три однопараметрических пучка $(H_\ell, \check{B}_\ell), (H_\ell, L), (L, \check{B}_\ell)$ виртуальных нормалей 1-го рода, которые в случае взаимного $H(\Lambda)$-распределения (при $\Lambda^n_{pu} \equiv 0$) [5], [6] вырождаются в один пучок (H_ℓ, L). В дифференциальной окрестности 2-го порядка M-распределение несет три однопараметрических пучка внутренних $M\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода $(N_\ell, \check{B}_\ell), (N_i, H_\ell)$, (N_ℓ, L), а в случае взаимного $H(\Lambda)$-распределения - два пучка $(N_\ell, H_\ell), (N_\ell, L)$.

3. В проективитете Бомпьяни-Пантази [3], который определим по закону

$$\nu_p = -\frac{1}{n-r-1}\left(\Lambda^u_{pu} + \Lambda^u_{pq}\nu^q_u\right), \tag{16}$$

каждой $H\Lambda$-виртуальной нормали 1-го рода $\{H^p_u\}, \{N^p_u\}, \{\check{B}^p_u\}$, $\{\chi^p_u\}$ поставим в соответствие $H\Lambda$-виртуальную нормаль второго рода $\{\nu_p\}$:

$$\hat{\ell}_p = -\frac{1}{n-r-1}\left(\Lambda^u_{pu} + \Lambda^u_{pq}H^q_u\right), \tag{17}$$

$$\hat{\tau}_p = -\frac{1}{n-r-1}\left(\Lambda^u_{pu} + \Lambda^u_{pq}N^q_u\right), \tag{18}$$

$$\hat{e}_p = -\frac{1}{n-r-1}\left(\Lambda^u_{pu} + \Lambda^u_{pq}\check{B}^q_u\right), \tag{19}$$

$$\hat{\chi}_p = -\frac{1}{n-r-1}\left(\Lambda^u_{pu} + \Lambda^u_{pq}\chi^q_u\right). \tag{20}$$

Квазитензоры $\{\hat{\ell}_p\},\{\hat{e}_p\},\{\hat{\chi}_p\}$ 1-го порядка и квазитензор $\{\hat{\tau}_p\}$ второго порядка попарно линейно независимы. Отсюда следует

Т е о р е м а 3. К Λ-распределению в дифференциальных окрестностях 1-го и 2-го порядка можно внутренним образом присоединить соответственно по три однопараметрических пучка $H\Lambda$-виртуальных нормалей 2-го рода: в окрестности 1-го порядка пучки $(\hat{\ell},\hat{e}),(\hat{\ell},\hat{\chi}),(\hat{e},\hat{\chi})$, а в окрестности 2-го порядка пучки $(\hat{\tau},\hat{\ell}),(\hat{\tau},\hat{e}),(\hat{\tau},\hat{\chi})$. В случае взаимного $H(\Lambda)$-распределения имеется один пучок $(\hat{\ell},\hat{\chi})$ в окрестности 1-го порядка и два пучка $(\hat{\tau},\hat{\ell}),(\hat{\tau},\hat{\chi})$ в окрестности 2-го порядка внутренних $H\Lambda$-виртуальных нормалей 2го рода, определенных с помощью проективитета Бомпьяни-Пантази (16).

§3. Фокальные образы, ассоциированные с $M(\Lambda)$-подрасслоением $\mathcal{H}$-распределения

Пусть M-подрасслоение (поле M-плоскостей) данного $\mathcal{H}$-распределения оснащено полем нормалей 1-го рода ν_{n-m}, определенным полем квазитензора $\{\nu^a_{\hat{\alpha}}\}$. В качестве такого поля нормалей можно выбрать, например, либо поле нормалей $\{H^a_{\hat{\alpha}}\}$ [3], либо поле нормалей $\{N^a_{\hat{\alpha}}\}$ [4], построение которых проводится аналогично, как в работах [3], [4]. Разместим вершины $A_{\hat{\alpha}}$ репера $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ в нормали 1-го рода $\nu_{n-m}(A_0)$. В этом случае формы $\omega^a_{\hat{\alpha}}$ становятся главными, т.е.

$$\omega^a_{\hat{\alpha}} = \nu^a_{\hat{\alpha}x}\,\omega^x_0. \tag{21}$$

Такой репер $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ будем называть репером, адаптированным полю нормалей 1-го рода ν_{n-m}, и обозначать $\mathcal{R}(\mathcal{H},\nu)$. Поле нормалей 1-го рода $\{\nu^a_{\hat{\alpha}}\}$ (поле ν_{n-m}-плоскостей) и поле Λ-плоскостей (базисное распределение) определяют поле $(n-m+r)$-мерных плоскостей $\Omega_{n-\ell}$, внутренне связанное с $\mathcal{H}$-распределением.

При смещении центра A_0 вдоль произвольной кривой

$$\omega^x_0 = \rho^x\theta, \quad d\theta = \theta\wedge\theta_1, \tag{22}$$

координаты точек фокального многообразия плоскости $\Omega_{n-\ell}$ (в

силу уравнений (1),(21)) удовлетворяют уравнениям

$$(\delta^i_x x^0 + \Lambda^i_{px}x^p + \nu^i_{\hat{\alpha}x}x^{\hat{\alpha}})\,\omega^x_0 = 0, \quad x^i = 0. \tag{23}$$

Отсюда, в частности, если фокальное направление определено уравнениями

$$\omega^{\hat{\alpha}}_0 = 0, \quad \omega^a_0 = \rho^a\theta, \tag{24}$$

то из уравнений (23) получаем

$$(\delta^i_a x^0 + \Lambda^i_{pa}x^p + \nu^i_{\hat{\alpha}a}x^{\hat{\alpha}})\rho^a = 0, \quad x^i = 0 \quad (\rho^{\hat{\alpha}} = 0). \tag{25}$$

Пусть квазитензор $\{\nu^p_i\}$ задает произвольную $M\Lambda$-виртуальную нормаль ν_ℓ (ν_ℓ-плоскость). При смещении вдоль кривых

$$\rho^{\hat{\alpha}} = 0, \quad \rho^p = \nu^p_i\rho^i, \tag{26}$$

принадлежащих ν_ℓ-плоскости, система уравнений (25) принимает вид:

$$\begin{cases} x^i = 0 \quad (\rho^{\hat{\alpha}} \equiv 0), \\ [\delta^i_j x^0 + (\Lambda^i_{pj} + \Lambda^i_{pq}\nu^q_j)x^p + (\nu^i_{\hat{\alpha}j} + \nu^i_{\hat{\alpha}q}\nu^q_j)x^{\hat{\alpha}}]\rho^j = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Так как ρ^i не все равны нулю, то из (27) получаем:

$$\begin{cases} x^i = 0, \\ \det\|\delta^i_j x^0 + (\Lambda^i_{pj} + \Lambda^i_{pq}\nu^q_j)x^p + (\nu^i_{\hat{\alpha}j} + \nu^i_{\hat{\alpha}q}\nu^q_j)x^{\hat{\alpha}}\| = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Уравнения (28) в общем случае определяют алгебраическое многообразие размерности $n-\ell-1$ порядка $\ell = m-r$, которое обозначим $\Phi(\Omega,\nu)$. Это многообразие лежит в плоскости $[\nu_{n-m},\Lambda] = \Omega_{n-\ell}$. Соответствующая Λ-плоскость пересекает многообразие $\Phi(\Omega,\nu)$ (28) по алгебраическому многообразию порядка ℓ и размерности $r-1$:

$$\begin{cases} x^i = 0, \ x^{\hat{\alpha}} = 0, \\ \det\|\delta^i_j x^0 + (\Lambda^i_{pj} + \nu^q_j\Lambda^i_{pq})x^p\| = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Многообразие (29) обозначим $\Phi_{r-1}(\Lambda,\nu)$. Линейная поляра центра A_0 относительно многообразия (29) определяется (в плоскости $x^{\hat{\alpha}} = 0$) уравнениями:

$$x^0 - \varepsilon_p x^p = 0, \quad x^{\hat{u}} = 0, \tag{30}$$

где

$$\varepsilon_p = -\frac{1}{\ell}\left(\Lambda^i_{pi} + \Lambda^j_{pq}\nu^q_j\right), \tag{31}$$

$$\nabla\varepsilon_p + \omega^0_p = \varepsilon_{pK}\,\omega^K_0. \tag{32}$$

Квазитензор $\{\varepsilon_p\}$ (32) определяет $M\Lambda$-виртуальную нормаль 2-го рода, соответствующую в проективитете Бомпьяни-Пантази (31) $M\Lambda$-виртуальной нормали 1-го рода $\{\nu^q_j\}$ (ν_ℓ-плоскости). Каждой $M\Lambda$-виртуальной нормали 1-го рода $\{H^q_i\}$, $\{\check{B}^p_i\}, \{\chi^p_i\}, \{N^p_i\}$ ставится в соответствие по закону (31) $M\Lambda$-виртуальная нормаль 2-го рода:

$$\begin{cases} \tilde{\ell}_p = -\frac{1}{\ell}\left(\Lambda^i_{pi} + \Lambda^j_{pq} H^q_j\right), & \tilde{\tau}_p = -\frac{1}{\ell}\left(\Lambda^i_{pi} + \Lambda^j_{pq} N^q_j\right), \\ \tilde{\ell}_p = -\frac{1}{\ell}\left(\Lambda^i_{pi} + \Lambda^j_{pq}\check{B}^q_j\right), & \tilde{\chi}_p = -\frac{1}{\ell}\left(\Lambda^i_{pi} + \Lambda^j_{pq}\chi^q_j\right). \end{cases} \tag{33}$$

Геометрические объекты (33) и соответствующие им геометрические объекты (17) - (20) задают одни и те же $M\Lambda$-виртуальные нормали 2-го рода.

§4. Плоскость Нордена-Тимофеева, ассоциированная с M-распределением

Поле нормалей 1-го рода $\{\nu^q_\alpha\}$ (поле ν_{n-m}-плоскостей) и поле ν_ℓ-плоскостей ($M\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода) определяют поле $(n-\tau)$-мерных плоскостей $\mathcal{N}_{n-\tau}$ ($\mathcal{N}$-плоскостей), внутренне связанное с $\mathcal{H}$-распределением. В репере $\mathcal{R}(\mathcal{H},\nu)$ конечные уравнения, определяющие плоскость поля $\mathcal{N}$-плоскостей, имеют вид:

$$x^p - \nu^p_i x^i - \nu^p_\alpha x^\alpha = 0. \tag{34}$$

Система уравнений

$$\begin{cases} x^p = \nu^p_i x^i + \nu^p_\alpha x^\alpha, \\ \det\left\| \delta^p_q x^0 + \left(\nu^p_{jq} - \nu^p_i \nu^t_j \Lambda^i_{tq}\right)x^j + \left(\nu^p_{\alpha q} - \nu^p_j \nu^j_{\alpha q}\right)x^\alpha \right\| = 0 \end{cases} \tag{35}$$

определяет фокальное многообразие $\Psi_{n-\tau-1}(\mathcal{N},\Lambda)$, соответствующее смещениям точки A_0 по кривым, принадлежащим полю Λ-плоскостей. В общем случае это будет алгебраическое многообразие размерности $n-\tau-1$ порядка τ. Многообразие $\Psi_{n-\tau-1}(\mathcal{N},\Lambda)$ лежит в $\mathcal{N}$-плоскости и пересекается с соответствующей ν_ℓ-плоскостью по алгебраическому многообразию порядка τ размерности $\ell-1$:

$$\begin{cases} x^{\hat\alpha} = 0, \quad x^p = \nu^p_j x^j, \\ \det\left\| \delta^p_q x^0 + \left(\nu^p_{jq} - \nu^p_i \nu^t_j \Lambda^i_{tq}\right)x^j \right\| = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Таким образом, в каждой ν_ℓ-плоскости некоторого пучка $M\Lambda$-виртуальных нормалей, определяемых квазитензором $\{\nu^p_j\}$, уравнения (36) задают фокальное многообразие $\Psi_{\ell-1}(\nu_\ell, \Lambda)$, соответствующее смещениям точки A_0 по кривым, принадлежащим полю Λ-плоскостей.

Линейная поляра точки A_0 относительно многообразия $\Psi_{\ell-1}(\nu,\Lambda)$ (36) определяется уравнениями вида:

$$x^0 - \nu_j x^j = 0, \quad x^p - \nu^p_j x^j = 0, \quad x^{\hat\alpha} = 0, \tag{37}$$

где

$$\nu_j = -\frac{1}{\tau}\left(\nu^p_{jp} - \nu^p_j \nu^t_K \Lambda^K_{tp}\right). \tag{38}$$

Плоскость, натянутая на линейные поляры центра A_0 относительно фокальных многообразий $\Phi_{\tau-1}(\Lambda,\nu)$ (29) и $\Psi_{\ell-1}(\nu_\ell,\Lambda)$ (36), является плоскостью Нордена-Тимофеева [7] неголономной композиции (Λ,ν_ℓ), ассоциированной с M-распределением. Относительно локального репера $\mathcal{R}(\mathcal{H},\nu)$ плоскость Нордена-Тимофеева неголономной композиции (Λ,ν_ℓ) задается уравнениями:

$$y^0 - q_a y^a = 0, \quad y^{\hat\alpha} = 0, \tag{39}$$

где

$$q_p = \varepsilon_p, \quad q_j = \nu_j - \varepsilon_p \nu^p_j. \tag{40}$$

Геометрическая интерпретация объекта $\{q_a\}$ была найдена Р.Ф.Домбровским [8] для касательно τ-оснащенных поверхностей проективного пространства. Мы получим результаты Р.Ф.Домбровского для частного класса $\mathcal{H}$-распределения, когда M-распределение голономно [9], т.е. когда проективное пространство P_n расслаивается на $(n-m)$-параметрическое семейство касательно τ-оснащенных гиперполос $H_{m,\tau}$, базисная поверхность каждой из которых есть касательно τ-оснащенная поверхность $V_{m,\tau}$.

Библиографический список

1. П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. 93с. Библиогр. 21 назв. Деп. в ВИНИТИ 2.07.84. № 4481-84 Деп.

2. П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. 36 с. Библиогр. 8 назв. Деп. в ВИНИТИ 9.01.85. № 252-85 Деп.

3. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

4. О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. П // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.95-114.

5. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т.7. С.117-151.

6. П о п о в Ю.И. Трехсоставные регулярные распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ проективного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1982. 126 с. Библиогр. 20 назв. Деп. в ВИНИТИ 16.12.82. № 6192-82 Деп.

7. Н о р д е н А.П., Т и м о ф е е в Г.Н. Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств // Известия вузов. Математика. 1972. №8. С.81-89.

8. Д о м б р о в с к и й Р.Ф. О неголономных композициях на поверхностях $M_{m,\tau}$ в P_n // Всес. науч. конф. по неевкл. геометрии: "150 лет геометрии Лобачевского". Казань. Тезисы докл. М., 1976. С.69.

9. П о п о в Ю.И. Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. 128 с. Библиогр. 149 назв. Деп. в ВИНИТИ 5.11.90. № 5625-В90 Деп.

УДК 514.75

ПАРЫ Т КОНГРУЭНЦИЙ, У КОТОРЫХ СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПРЯМЫЕ ИМЕЮТ РАВНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ АБСЦИСС ФОКУСОВ

О.С.Р е д о з у б о в а

(МГПИ им. В.И.Ленина)

В евклидовом трехмерном пространстве рассматриваются пары Т конгруэнций, у которых соответствующие прямые имеют равные произведения абсцисс соответствующих фокусов. Изучены геометрические свойства таких конгруэнций в общем случае. Пары обозначены буквой Т'.

К паре Т' конгруэнций $\{\tau_a\}$ $(a=1,2)$ присоединена конгруэнция $\{\tau\}$ общих перпендикуляров. Прямая τ пересекает прямые τ_a в точках K_a. С конфигурацией связан подвижный ортонормированный репер $R=(O,\vec{e}_i)$ $(i=1,2,3)$ такой, что $\vec{e}_3 \parallel \tau$. При перемещении репера имеют место формулы:

$$\vec{dO} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \quad (i,j=1,2,3).$$

Направляющие векторы прямых τ_a есть векторы $\vec{\eta}_a=\vec{e}_1\cos\alpha_a+\vec{e}_2\sin\alpha_a$, где α_a - углы, образуемые векторами $\vec{\eta}_a$ с вектором $\vec{e}_1$. По отношению к реперу $R_a=(K_a,\vec{\eta}_a)$ фокусы F_a, F_a' прямых τ_a имеют координаты ρ_a, ρ_a' $(a=1,2)$. Точки K_a относительно репера $\tilde{R}=(O,\vec{e}_3)$ имеют координаты h_a.

Пары Т конгруэнций определяются системой уравнений (2) в работе [1]. Известно, что пары Т конгруэнций могут быть общими и специальными. Первые существуют с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 1. Пары Т' конгруэнций существуют в общем случае с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В общем случае пары Т конгруэнций определяются системой уравнений (3) из [1]:

$$\begin{cases} A_1=\Omega_{13}\dfrac{\rho_2\rho_2'(\rho_1'-\rho_1)}{\rho(h_1-h_2)}+Q_1\dfrac{\rho_2-\rho_2'}{\rho}, \\ H_1=\Omega_{13}\dfrac{\rho_1\rho_1'(\rho_2'-\rho_2)}{\rho(h_1-h_2)}+Q_1\dfrac{\rho_1-\rho_1'}{\rho}. \end{cases} \qquad (1)$$